Correction : TD Logique

Tableau de vérité

V=vrai, et F=faux.

Pour la négation :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Autres définitions :

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

On dit que deux formules propositionnelles sont équivalentes si elles ont la même table de vérité.

Exercice 1.

Montrer l'équivalence des formules suivantes

1. $\neg(p \vee q)$ et $(\neg p \wedge \neg q)$
2. $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$
3. $p \Rightarrow q$ et $\neg p \wedge \neg q$
4. $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$
5. $p \Rightarrow q$ et $\neg p \Rightarrow \neg q$

Correction

1. .

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F

$\neg(p \vee q)$ et $(\neg p \wedge \neg q)$ ont la même table de vérité alors sont équivalentes.

2. .

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F

$p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ ont la même table de vérité alors sont équivalentes.

3. .

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F

$p \Rightarrow q$ et $\neg p \wedge \neg q$ n'ont pas la même table de vérité alors ne sont pas équivalentes.

4. .

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V

$\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$ ont la même table de vérité alors sont équivalentes.

5. .

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F

$p \Rightarrow q$ et $\neg p \Rightarrow \neg q$ ont la même table de vérité alors sont équivalentes

Exercice 2.

Quelle est la valeur de vérité de chacune des formules suivantes :

1. $(3 > 0) \vee (1 < 0)$
2. $(3 > 0) \vee (1 > 0)$
3. $(3 \geq 10) \wedge (1 + 9 = 10)$
4. $(3 \geq 10) \wedge (1 + 9 = 11)$

Correction

1.

$(3>0)$	$(1<0)$	$(3>0)\vee(1<0)$
V	F	V

2.

$(3>0)$	$(1>0)$	$(3>0)\vee(1>0)$
V	V	V

3.

$(3\geq 10)$	$(1+9=10)$	$(3\geq 10)\wedge(1+9=10)$
F	V	F

4.

$(3\geq 10)$	$(1+9=11)$	$(3\geq 10)\wedge(1+9=11)$
F	F	F

Négation

La contraposée de $(A \Rightarrow B)$ est $(non(B) \Rightarrow non(A))$ et ces deux expressions désignent la même chose.
Au contraire, une négation désigne la proposition "opposée" : la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A$ et $non(B))$.

Exercice 3.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Correction

1. Il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 1$.
2. L'application f est croissante c'est à dire : pour tout couple de réels $(x_1; x_2)$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$. La négation
   Il existe un couple de réels $(x_1; x_2)$ tels que $(x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2))$
3. (l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive)
   La négation de l'assertion complète est : Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $(x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2))$ ou il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $y \in \mathbb{R}$ tels que $(x < y$ et $f(x) \leq f(y))$.

Exercice 4.

Ecrire la négation des formules suivantes :

1. $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$
2. $\exists x,\ p(x) \wedge q(x)$
3. $\forall x\ \forall y,\ (p(x,y) \wedge q(x,y)) \Rightarrow r(x,y)$
4. $\exists x\ \forall y,\ q(x,y) \Rightarrow (p(x,y) \vee r(x,y))$

Correction

1. $\exists x,\ tels\ que\ p(x)\ et\ q(x).$
2. $\forall x, p(x) \vee q(x)$
3. $\exists x\ \exists y,\ tels\ que\ (p(x,y) \wedge q(x,y))\ et\ \urcorner r(x,y)$
4. $\forall x\ \exists y,\ tels\ que\ q(x,y)\ et\ (p(x,y) \wedge r(x,y))$

Exercice 5.

Enoncer la négation des assertions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.
4. $\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ (|x - \frac{3}{2}| < \alpha \Rightarrow |2x - 3| < \epsilon)$.

Correction

1. Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit.
2. Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire.
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit
   $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z}\ (z < x \Rightarrow z < x + 1)$,
   la négation est
   $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ \exists z \in \mathbb{Z}$ tels que $(z < x$ et $z \geq x + 1)$.
4. $\exists \epsilon > 0\ \forall \alpha > 0$ tels que $(|x - \frac{3}{2}| < \alpha$ et $|2x - 3| \geq \epsilon)$.

Exercice 6.

Soit P, Q, R des propositions. Dans chacun des cas suivants, les propositions citées sont-elles la négation l'une de l'autre ?
1) $(P\ et\ Q); (non\ P\ et\ non\ Q)$ 2) $(P\ \Rightarrow\ Q); (non\ Q\ \Rightarrow\ non\ P)$ 3) $(P\ ou\ Q); (P\ et\ Q)$
Correction
1) Non
2) Non
3) Oui négation

Ensembles

Exercice 7.

1. Soit A, B deux ensembles, montrer que :
   (a) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
   (b) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
2. E un ensemble. Montrer les assertions suivantes :
   (a) $\forall A, B \in P(E)\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$
   (b) $\forall A, B, C \in P(E)\ (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

Correction

1. (a)
$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in (\complement A \cap \complement B) \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in (\complement A \cup \complement B) \end{aligned}$$

2. (a) 1ère Methode : étant donné $x \in A$ montrons que $x \in B$. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Donc $x \in B$ et $A \subset B$. Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.
   2ème Methode : Nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons montrer que $A \cup B \neq A \cap B$. Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cup B \neq A \cap B$.
   (b)

Condition suffisante - Condition nécessaire

Exercice 8.

Soient les propsitions P, Q et R :
P : x est un entier pair.
Q : x est divisible par 4.
R : x est divisible par 2.

1. Le prédicat P est-il une condition suffisante de Q ? Une condition nécessaire ?
2. Le prédicat P est-il une condition suffisante de R ? Une condition nécessaire ?

Correction

1. x est divisible par 4 signifie $\exists k \in \mathbb{N}$ tels que $x = 4k = 2(2k)$, donc x est pair alors P est Une condition nécessaire.
   Par contre 6 est un entier pair mais n'est pas divisible par 4 alors cette condition n'est pas suffisante de Q.
2. Le prédicat P est une condition nécessaire et suffisante de R.