TD : Logique

Tableau de vérité

V=vrai, et F=faux.

Pour la négation :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Autres définitions :

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

On dit que deux formules propositionnelles sont équivalentes si elles ont la meme table de vérité.

Exercice 1.

Montrer l'équivalence des formules suivantes

1. $\neg(p \vee q)$ et $(\neg p \wedge \neg q)$
2. $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$
3. $p \Rightarrow q$ et $\neg p \wedge \neg q$
4. $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$
5. $p \Rightarrow q$ et $\neg p \Rightarrow \neg q$

Exercice 2.

Quelle est la valeur de vérité de chacune des formules suivantes :

1. $(3 > 0) \vee (1 < 0)$
2. $(3 > 0) \vee (1 > 0)$
3. $(3 \geq 10) \wedge (1 + 9 = 10)$
4. $(3 \geq 10) \wedge (1 + 9 = 11)$

Négation

Exercice 3.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 4.

Ecrire la négation des formules suivantes :

1. $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$
2. $\exists x,\ p(x) \wedge q(x)$
3. $\forall x\ \forall y,\ (p(x,y) \wedge q(x,y)) \Rightarrow r(x,y)$
4. $\exists x\ \forall y,\ q(x,y) \Rightarrow (p(x,y) \vee r(x,y))$

Exercice 5.

Enoncer la négation des assertions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.
4. $\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ (|x - \dfrac{3}{2}| < \alpha \Rightarrow |2x - 3| < \epsilon)$.

Exercice 6.

Soit P, Q, R des propositions. Dans chacun des cas suivants, les propositions citées sont-elles la négation l'une de l'autre ?
1) $(P\ et\ Q); (non\ P\ et\ non\ Q)$ 2) $(P \Rightarrow Q); (non\ Q \Rightarrow non\ P)$ 3) $(P\ ou\ Q); (P\ et\ Q)$

Ensembles

Exercice 7.

1. Soit A, B deux ensembles, montrer que :
   (a) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
   (b) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
2. E un ensemble. Montrer les assertions suivantes :
   (a) $\forall A, B \in P(E)\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$
   (b) $\forall A, B, C \in P(E)\ (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

Condition suffisante - Condition nécessaire

Exercice 8.

Soient les propsitions P, Q et R :
P : x est un entier pair.
Q : x est divisible par 4.
R : x est divisible par 2.

1. Le prédicat P est-il une condition suffisante de Q ? Une condition nécessaire ?
2. Le prédicat P est-il une condition suffisante de R ? Une condition nécessaire ?